2006

X为一内积空间，x,y为其上两个向量，求证  
1，x,y正交，则x,y线性无关  
2，x,y正交，当且仅当对于任意实数a，||x+ay||=||x-ay||  
3，x,y正交，当切仅当对于任意实数a，||x+ay||>=||x||  
  
二，赋范空间X和Y, 称T: X-->Y为紧算子，若对于任意包含于X的有界序列(Xk)，(TXk)包含一个收敛子列。所有紧算子构成空间K(X,Y)，求证：  
1，K(X,Y)包含于B(X,Y)，且K(X,Y)为线性子空间  
2，对于S包含于B(X,Y)，T包含于B(Y,Z)，T，S中有一个是紧算子，则TS为紧算子  
3，对于T包含于B(X,Y)，如果R(T)=(Tx)为有限维空间，则T是紧算子；对于无穷维赋范空间X，举例说明存在T包含于B(X,Y)/K(X,Y)  
  
三，Banach空间X，泛函序列(fn)包含于X'，若对于任意x包含于X，极限 lim fn(x) 存在，定义 f(x)=lim fn(x), 求证：  
1，存在C，C>0，且对于所有n，||fn|| < C  
2，f包含于X'，且||f|| <= sup ||fn||  
3，上述证明中X的完备性是根本的，举例说明，如果X不完备，则论断1和论断2中的f包含于X'不一定成立  
  
四，X=C[-1,1]，f(x)=3倍的[1,0]上x(t)的积分 - 2倍的[-1,0]上x(t)的积分。求证：  
f包含于X'，求||f||。  
  
五，X=(x|x=(xn)，且存在C，使得对于任意n，|n xn| < C )。其上的范数定义为||x||=sup|n xn|。求证：  
1，上述定义的范数||.||确为X上范数  
2，X包含于c0，取T:X-->c0，T((xn))=(xn)，成为X忘c0上的嵌入，则T线性有界，求||T||，T为满射么？